Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_____________ В.Н. Деснянский
«20» января 2021 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2020-2021 УЧ. ГОД
Решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 1

Задание 1.

Пусть в ИПСС учится x студентов, тогда в ИТТСУ учится $1{,}5\,x$ студентов. Отсюда в ИПСС учится $0{,}1\,x$ девушек, а в ИТТСУ учится $0{,}05\cdot 1{,}5\,x$ девушек. Поэтому средний процент девушек по этим двум институтам равен:

$$\frac{0{,}1x + 0{,}05 \cdot 1{,}5x}{2{,}5x} \cdot 100\%$$

Отсюда:

$$\frac{0{,}1 + 1{,}5 \cdot 0{,}05}{2{,}5} \cdot 100 = 7\%$$

Ответ: 7%

Задание 2.

Проведем доказательство методом математической индукции.

При $n = 1$ утверждение верно.

Пусть оно верно при $n = k$.

Покажем, что тогда оно верно и для $n = k + 1$.

Имеем:

$$5 \cdot (k+1)^3 + 4 \cdot (k+1) = 5 \cdot (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 4k + 4 =$$

$= 5k^3 + 4k + 15k^2 + 15k + 9 = 5k^3 + 4k + 3 \cdot (5k^2 + 5k + 3)$

Отсюда следует, что выражение делится на 3, так как двучлен $5k^3 + 4k$ делится на 3 по предположению индукции.

Задание 3.

Находим, что $y' = x^4 + x^3 - 2x^2 = 0$. Отсюда $x^2 \cdot (x^2 + x - 2) = 0$, а тогда критические точки $x = -2, x = 1$.

Значит при $-\infty < x \le -2$ и при $x \ge 1$, $f(x)$ возрастает, при $-2 < x < 1$ убывает.

Находим, что $f\left(-\frac{5}{2}\right) > 0$, а тогда при $-\frac{5}{2} < x \le -2$, $f(x)$ будет положительна. Кроме того, так как $f(1) > 0$, то при $1 \le x \le 2$ $f(x) > 0$, то следовательно при $x \in \left[-\frac{5}{2}; 2\right]$, $f(x) > 0$

Ответ: корней нет

Задание 4.

Если треугольник тупоугольный, то по теореме косинусов квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других сторон. Покажем, что в нашем случае это выполняется.

Пусть *a,b,c* – стороны треугольника и соответствующие им высоты равны: $h_a = 3, h_b = 4, h_c = 5$. Для площади треугольника имеем:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} <=> a = \frac{2S}{h_a} = \frac{2S}{3}, b = \frac{S}{2}, c = \frac{2S}{5}$$

Отсюда: $a^2 = \frac{4S^2}{9}$, $b^2 = \frac{S^2}{4}$, $c^2 = \frac{4S^2}{25}$

Поэтому получим: $b^2 + c^2 = \frac{41S^2}{100} < a^2 = \frac{4S^2}{9}$, т.е. треугольник тупоугольный.

Ответ: тупоугольный

Задание 5.

ОДЗ $8x - x^2 > 0$, $0 < x < 8$. Поэтому при $x > 0$ $\frac{x}{4} + \frac{4}{x} \ge 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{4}{x}} = 2$.

С другой стороны, $log_4(8x - x^2) = log_4(16 - (x-4)^2) \le log_4 16 = 2$.

Поэтому равенство возможно, если обе части равенства равны 2, а это будет лишь при $x = 4$.

Проверка показывает, $x = 4$ есть действительно корень этого уравнения.

Ответ: 4

<u>Задание 6.</u>

Для удобства прономеруем строки:

$*1* -$ 1-я

$3*2 -$ 2-я

$*3* -$ 3-я

$3*2* -$ 4-я

$*2*5 -$ 5-я

$1*8*30 -$ 6-я

Можно увидеть, что последняя звездочка в третьей строке есть 0, так как цифра 0 стоит в конце 6-й строки.

Теперь определяется значение последней звездочки первой строки: это цифра, которая от умножения на 2 дает число, оканчивающееся нулем, а от умножения на 3 – число, оканчивающееся 5 (пятый ряд). Такая цифра только одна – это 5.

Сравнивая цифры, стоящие на втором с конца месте в 3 и 6 строках, находим, что в конце четвертой строки стоит цифра 0. Далее под звездочкой второй строки может быть только цифра 8, так как при умножении 8 на число 15 получается число, оканчивающееся 20 (четвертая строка). И наконец, ясно, что значение первой звездочки строки 1 это цифра 4, потому, что только 4 умноженное на 8 дает результат, начинающийся на 3 (строка 4).

Остальные звездочки находятся уже непосредственно, так что получим $415 \cdot 382 = 158530$.

Ответ: 415 и 382

<u>Задание 7.</u>

Пусть высота призмы равна x, а радиус шара, вписанного в призму равен r. Тогда объем призмы будет равен: $V = x \cdot S_{\text{осн}} = 6x$. С другой стороны, объем призмы будет равен сумме объема пяти пирамид, каждая из которой имеет высоту равную r, а основаниями пирамид будут грани призмы. Приравняв эти объемы, получим равенство:

$$6x = \frac{1}{3}r \cdot 3 \cdot x + \frac{1}{3}r \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{3}r \cdot 5x + \frac{2}{3}r \cdot 6.$$

Отсюда находим, что $6x = 4rx + 4r$, но $r = \frac{x}{2}$, следовательно $4rx = 4x,\ r = 1,\ x = 2$. Поэтому $V = 12$.

Ответ: 12

Задание 8.

График функции $y = 2x + \frac{1}{2x}$ есть нечетная функция, которая имеет две асимптоты: вертикальную $x = 0$ и наклонную $y = 2x$. Пусть ABC искомый треугольник, одна из вершин A лежит в точке (–10;0), две другие: $B\left(x; 2x + \frac{1}{2x}\right)$, C – вершина симметричная вершине B относительно начала координат, т.е. $C\left(-x; -2x - \frac{1}{2x}\right)$.

Нужно минимизировать площадь треугольника ABC. Имеем:

$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABO} = 2 \cdot \frac{1}{2} A_o \cdot h$, где h – расстояние точки B от основания A_o (o – начало координат), тогда $S = 10 \cdot \left(2x + \frac{1}{2x}\right),\ (x > 0)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$, так $a + \frac{1}{a} \geq 2$, то $2x + \frac{1}{2x} \geq 2$.

Поэтому $\min f(x) = 2$ при $2x = \frac{1}{2x} => x = \frac{1}{2}$.

А тогда $\min S_{\Delta ABC} = 10 \cdot 2 = 20$.

Ответ: 20

Задание 9.

По теореме Виета уравнение имеет два корня:

$$\sin 3x = \frac{1}{2} \text{ и } \sin 3x = a.$$

Функция $y = sin3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$,поэтому на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. уравнение $\sin 3x = \frac{1}{2}$ имеет два решения, другое решение исходного уравнения $\sin 3x = a$. Значит нужно, чтобы $a = 1$ и тогда будем иметь три корня.

Ответ: 1

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_____________ В.Н. Деснянский
«20» января 2021 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2020-2021 УЧ. ГОД
Решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 2

Задание 1.

Пусть в ИПСС учится x студентов, тогда в ИЭФ – $1{,}5x$, а в ИТТСУ $1{,}25x$. А тогда в ИПСС отличников $0{,}1x$, в ИЭФ $0{,}3x$ и в ИТТСУ отличников – $0{,}05x$.

А тогда средний процент отличников будет равен:

$$\frac{0{,}1x + 0{,}3x + 0{,}05x}{x + 1{,}5x + 1{,}25x} \cdot 100\% = 12\%$$

Ответ: 12%

Задание 2.

Проведем доказательство методом математической индукции.

При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что при $n = k$, $k^5 + 4k$ делится на 5, тогда при $n = k + 1$, имеем:

$$(k+1)^5 + 4 \cdot (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 + 4k + 4 =$$
$$= (k^5 + 4k) + 5 \cdot (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1).$$

Отсюда каждое выражение в скобках делится на 5, что и требовалось доказать.

Задание 3.

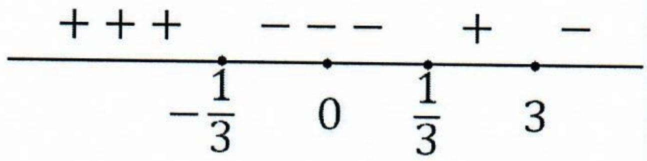
Пусть: $f(x) = 9x^3 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} - 3x + 1$.

Тогда: $f'(x) = 27x^2 - 9x^3 + x - 3$

Находим критические точки (т.е. корни производной функции).

Получим: $(x-3)\cdot(1-3x)\cdot(1+3x) = 0$.

Отмечая эти точки на оси Ox, получим промежутки, где y', сохраняет знак. Следовательно, $0 \le x \le \frac{1}{3}$ функция монотонно убывает, при $\frac{1}{3} \le x \le 3$ монотонно возрастает.



Находим, что $f(0) = 1, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{36}$. Значит на всем промежутке от $0 \le x \le 3$ $f(x) > 0$, т.е. исходное уравнение на этом промежутке не имеет корней.

Ответ: не имеет

Задание 4.

Обозначим стороны треугольника *ABC a,b,c,* а медианы m_a, m_b, m_c.

Для трех медиан имеем равенства:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

Найдем *a,b,c.* Сложим второе и третье уравнение, получим:

$4\cdot(m_b^2 + m_c^2) = 4a^2 + (b^2 + c^2)$ => подставляя выражение $(b^2 + c^2)$ в первое уравнение, получаем:

$$a^2 = \frac{4}{9}\cdot(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$$

Аналогичные формулы справедливы для b и c. Следовательно, находим, что $a^2 = \frac{4}{9}\cdot 73$, $b^2 = \frac{4}{9}\cdot 52$, $c^2 = \frac{4}{9}\cdot 25$. Поскольку для квадрата большей стороны треугольника выполняется неравенство $a^2 < b^2 + c^2$, то по теореме косинусов треугольник остроугольный.

Ответ: остроугольный.

Задание 5.

ОДЗ $x^2 - 6x < 0 \; => 0 < x < 6$. Имеем:

$$\frac{x}{3} + \frac{3}{x} = log_3(9 - (x-3)^2).$$

Так как $a + \frac{1}{a} \geq 2$, то $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} \geq 2$.

С другой стороны, $log_3(9 - (x-3)^2) \leq log_3 9 = 2$. Следовательно, данное равенство возможно только при $x = 3$ (обе части уравнения будут равны 2).

Ответ: 3

Задание 6.

Пронумеруем строки данного примера сверху вниз (всего 6 строк). А тогда в пятой строке третья цифра будет 5, а в шестой строке последняя цифра также пять. Так как последняя цифра в четвертой строке 0, то третья цифра в третьей строке будет 7. Так как первая цифра в четвертой строке 1, то первая цифра в пятой строке должна быть 3, и тогда первая цифра первой строки также 3. Так как четвертая цифра в четвертом ряду ноль, то вторая цифра во втором ряду может быть только 4. Осталось определить две цифры: третью во втором ряду и вторую цифру в первом ряду. Для третьей цифры возможны лишь цифры 7 и 9. В случае 7 вторая цифра в первом ряду должна быть два и мы получим два числа 325 и 147, которые удовлетворяют условию задачи.

Если же третья цифра во второй строке будет 9, то не получится.

Ответ: 325, 147

Задание 7.

Пусть боковое ребро призмы равно x. Так как шар вписан в призму, то его диаметр равен x. Объем призмы $V = x \cdot S_{\text{осн}} = 9\sqrt{3}x$. С другой стороны, объем призмы равен сумме объемов пяти пирамид с высотой $\frac{x}{2}$ и основаниями равными площади граней призмы. Поэтому получим:

$$9\sqrt{3}x = \frac{1}{6}x \cdot 6 \cdot 3x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot 9\sqrt{3} \; => 9\sqrt{3}x = 3x^2 + 3x\sqrt{3} \; => x = 2\sqrt{3}.$$

Следовательно, $V = 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 54$

Ответ: 54

<u>Задание 8.</u>

Пусть треугольник AOB образован отрезком AB касательной к графику $y = (x+1)^2$, проведенной в точке $(a; (a+1)^2)$ и отрезками OB и AO на осях координат. Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{BO \cdot AO}{2}$. Пряма AB – касательная к графику $y = (x+1)^2$, имеет уравнение:

$$y - (a+1)^2 = (2a+2) \cdot (x-a).$$

Отсюда находим координаты точек A и B: $A\left(\frac{a-1}{2}; 0\right), B(0; -a^2+1)$. Следовательно, площадь $S(a)$ треугольника AOB находится по формуле:

$$S(a) = \frac{|a-1| \cdot |1-a^2|}{4}.$$

Таким образом, нужно найти $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ такие, что функция:

$$S_1(a) = (1-a) \cdot (1-a^2) = a^3 - a^2 + 1 - a$$

принимает наибольшее значение.

Чтобы найти наибольшее значение функции на $[c; d]$ надо вычислить значения функции в ее критических точках, принадлежащих интервалу $(c; d)$, вычислить значения в точках $x = c$ и $x = d$ и выбрать среди полученных чисел наибольшее.

Находим $S_1'(a) = 3a^2 - 2a - 1$, отсюда критические точки будут $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{3}$.

В промежуток $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ попадает лишь точка $a = -\frac{1}{3}$.

Поэтому сравниваем значения $S_1(a)$ в точках $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$, 0. Находим, что наибольшее значение S_1 будет в точке $a = -\frac{1}{3}$. Значит наибольшая площадь будет при $a = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\boldsymbol{a = -\frac{1}{3}}$

Задание 9.

Обозначим $t = 2^{2x-x^2} > 0$, тогда:

$$2cos^2 t = a + \sqrt{3}\sin 2t <=> \cos 2t + 1 = a + \sqrt{3}\sin 2t$$

$$<=> \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2}, \text{так как } 2t = 2^{2-(x-1)^2} \leq 4,$$

$$\text{то } \frac{\pi}{3} < 2t + \frac{\pi}{3} \leq 4 + \frac{\pi}{3} => -1 \leq \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

$=>$ исходное уравнение будет иметь решения при условии:

$$-1 \leq \frac{a-1}{2} < \frac{1}{2} <=> -1 \leq a < 2.$$

Ответ: $[\mathbf{-1}; \mathbf{2})$

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
_____________ В.Н. Деснянский
«20» января 2021 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2020-2021 УЧ. ГОД
Решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 3

Задание 1.

Пусть в ИПСС учится a студентов, тогда в ИЭФ учится $1{,}5a$ студентов. Девушек в ИПСС будет $0{,}1a$, в ИЭФ девушек $0{,}3a$. Тогда средний процент девушек будет равен:

$$\frac{0{,}1a + 0{,}3a}{a + 1{,}5a} \cdot 100\% = \frac{0{,}4}{2{,}5} \cdot 100\% = 16\%$$

Ответ: 16%

Задание 2.

Докажем методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно при $n = k$, т.е. $5k^3 - 2k$ делится на 3. Тогда:

$$5 \cdot (k+1)^3 - 2 \cdot (k+1) = 5k^3 + 15k^2 + 15k + 5 - 2k - 2 =$$
$$= 5k^3 - 2k + 3 \cdot (5k^2 + 5k + 1)$$

$=>$ утверждение доказано, т.к. имеем сумму двух выражений, делящихся на 3.

Задание 3.

Пусть $y(x) = 2x^2 - x^3 - x + 3$, тогда $y'(x) = 4x - 3x^2 - 1$. Находим корни производной $3x^2 - 4x + 1 = 0 \;=>\; x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$. По знаку производной находим, что при $0 \le x \le \frac{1}{3}$ функция монотонно убывает, при $\frac{1}{3} \le x \le 1$ монотонно возрастает, а при $1 < x \le 2$ монотонно убывает. Далее:

$$f(0) = 3, \qquad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{77}{27}, \qquad f(1) = 3, \qquad f(2) = 1$$

Следовательно, для $x \in [0; 2]$ $f(x) > 0$, т.е. на этом отрезке исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: не имеет

Задание 4.

Пусть дан треугольник *ABC*, где *BH* – высота, *BM* медиана так, что углы: *ABH, HBM* и *MBC* равны. Обозначим $\angle ABH = \alpha$, тогда $\angle BAH = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCA = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ применим к треугольникам *ABM* и *BMC* теорему синусов:

$$\frac{AM}{sin\ 2\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)},$$

так как *AM* = *MC*, то разделив одно равенство на другое, получим:

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} <=> \sin 4\alpha = \sin 2\alpha.$$

Так как $0 < 3\alpha < \pi$, то $\sin 2\alpha \ne 0$, тогда $\cos 2\alpha = \frac{1}{2} => \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$=> \angle ABC = \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, треугольник *ABC* прямоугольный.

Ответ: прямоугольный

Задание 5.

ОДЗ $10x - x^2 > 0 <=> x^2 - 10x < 0 <=> 0 < x < 10.$

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{x}{5} + \frac{5}{x} = log_5(25 - (x-5)^2).$$

Так как при $x > 0$ $\frac{x}{5} + \frac{5}{x} \ge 2$, а $log_5(25 - (x-5)^2) \le 2$, то равенство возможно лишь при $x = 5$.

Ответ: 5

Задание 6.

Пронумеруем строки сверху вниз (всего шесть строк). Тогда ясно, что первые три цифры второй строки будут 325. Четвертая цифра четвертой строки будет 0. Так как вторая цифра 5 строки пять, то это возможно лишь, когда шестая цифра второй строки будет 2, а тогда пятая и шестая строка это число 650, следовательно, пятое число в первой строке есть 0. Далее, заметим, что пятая цифра во втором ряду будет 6, следовательно, четвертый ряд есть число 1950, а третий ряд есть число 2015. И наконец, третье число в первом ряду будет 6, а первое число в первом ряду 5.

Таким образом, $52650 = 325 \cdot 162$.

Ответ: 52650

Задание 7.

Пусть боковое ребро призмы равно x. Так как шар вписан в призму, то его диаметр равен x. Площадь основания призмы будет равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \sin 30^\circ = 1.$$

Тогда объем призмы равен x. С другой стороны, если соединить центр шара со всеми вершинами призмы, то получим 5 пирамид, сумма объемов которых также равна объему призмы. Приравняв эти объемы, получим:

$$x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot 2^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot x \cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}} => x = \frac{2}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Ответ: $\frac{2}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Задание 8.

Пусть ABO данный треугольник, вершина A – лежит на оси Ox, вершина B на оси Oy, а сторона AB треугольника лежит на касательной к параболе $y = (x+2)^2$, проведенной в точке a, где $-1 \le a \le 0$, O – центр системы координат. Тогда уравнение касательной будет:

$$y = (a+2)^2 + 2 \cdot (a+2) \cdot (x-a),$$

отрезок OB будет равен $4 - a^2$, а отрезок $OA = |a-2|$. Следовательно, площадь треугольника ABO будет равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{|a-2|}{2} \cdot (4 - a^2)$$

Нужно найти $\max|a-2| \cdot (4 - a^2) = S_1$

Находим $S_1' = 3a^2 - 4a - 4$.

Критические точки есть корни уравнения $S_1' = 0$.

Это будут точки $a = 2$ и $a = -\frac{2}{3}$. В промежуток $-1 \leq a \leq 0$ попадает лишь точка $a = -\frac{2}{3}$. Тогда при $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ $S_1(x)$ монотонно возрастает и при $a = -\frac{2}{3}$ S_1 имеет максимум.

Ответ: $a = -\frac{2}{3}$

Задание 9.

Оба выражения определены для всех $x \in R$, их сумма равна:

$$log_a(\sin x + 2) \cdot (\sin x + 3).$$

Эта сумма будет равна единице тогда и только тогда, когда:

$$(\sin x + 2) \cdot (\sin x + 3) = a.$$

Обозначим $\sin x = t$, тогда квадратичная функция:

$$f(t) = (t+2) \cdot (t+3) = \left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

От $t_b = -\frac{5}{2}$, $f(t)$ будет возрастать. Но так как $-1 \leq t = \sin x \leq 1$, то $f(t)$ будет принимать значения от минимального $f(-1) = 2$ до максимального $f(1) = 12$. Значит и решения уравнения будут существовать при $a \in [2; 12]$.

Ответ: $a \in [2; 12]$